5. Tutorium

Samstag, 14. Mai 2022 13:56

1 Kramers - Kronig Transformation

- Bisher haben wir die Polarisation immer im Frequenzraum betrachtet
- der zeitliche Zusammenhang ist etwas komplizierter

↳ im Allgemeinen kann die Polarisation von Feldern an anderen Orten zu anderen Zeiten abhängen $\vec{P}(\vec{r},t) = \vec{P}\left(\vec{E}(\vec{r}',t'), \vec{B}(\vec{r}',t')\right)$

- wir treffen einige einschränkende Annahmen

  • keine magnetischen Effekte $\vec{P}\left(\vec{E}(\vec{r}',t')\right)$
  • nur lokale Interaktionen $\vec{r} = \vec{r}'$
    ↳ keine „Ausbreitung" der Polarisation
    ↳ nicht-lokale Effekte: $\sim 10^{-10}\,m$ (atomare Effekte)
    währenddessen: Variationen des optischen Feldes: $10^{-6}\,m$

  • Kausalität: Polarisation hängt nicht von Feldern in der Zukunft ab $t' \leq t$

$$\Rightarrow \vec{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \; R(\tau)\, \vec{E}(t-\tau) \qquad \text{(Faltung)}$$

wird manchmal auch weggelassen

↳ Responsefunktion $R(t<0) = 0$
↳ beschreibt „Gedächtnis" des Materials
↳ ist reell

· Zusammenhang mit der Suszeptibilität

2. Tutorium

$$\vec{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \tilde{\tilde{\vec{E}}}(\omega) = \varepsilon_0 \, FT\left[\vec{E}(t) * R(\tau)\right] = \varepsilon_0 \underbrace{FT[R(\tau)](\omega)}_{\chi(\omega)} \tilde{\tilde{\vec{E}}}(\omega)$$

$$\Rightarrow \chi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} R(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

⇒ Da $R(t)$ reell ist muss $\chi(-\omega) = \chi^*(\omega)$ symmetrisch sein ↗ Tutorium 4

Die Kramers Kronig - Relation setzt nun $\chi(\omega)$ mit der Suszeptibilität bei anderen Frequenzen in Beziehung

$$\chi(\omega) = \frac{1}{i\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{\omega-\varepsilon} d\bar{\omega} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega}-\omega} + \int_{\omega+\varepsilon}^{\infty} d\bar{\omega} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega}-\omega} \right] = \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\omega} \frac{\chi(\bar{\omega})}{\bar{\omega}-\omega}$$

→ Integralgleichung

- diese Gleichung ist noch nicht besonders nützlich, allerdings lässt sich daraus folgendes herleiten ↗ Hausaufgabe Serie 6

$$\mathrm{Re}(\chi(\omega)) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\omega} \, \frac{\mathrm{Im}(\chi(\bar{\omega}))}{\bar{\omega} - \omega}$$

$$\mathrm{Im}(\chi(\omega)) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\omega} \, \frac{\mathrm{Re}(\chi(\bar{\omega}))}{\bar{\omega} - \omega}$$

Beziehung zwischen Real- und Imaginärteil

$\mathrm{Re}\,\chi = \frac{1}{2}(\chi + \chi^*)$

Anwendung: Bestimmung der Dispersion eines Materials (Realteil von ε) mithilfe einer einfachen Absorptionsmessung (Imaginärteil von ε)

↳ $\alpha = \frac{\omega}{nc} \varepsilon''$

2. Doppelbrechende Materialien

- wir betrachten nun anisotrope Materialien: $D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j$

  ↑ Tensor zweiter Stufe
- es gilt nun nicht mehr $\vec{D} \parallel \vec{E}$
- für transparente Materialien lässt sich zeigen, dass $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^*$ (hermitesch)

  ↳ Herleitung mit Poynting Theorem

⇒ Eigenwerte sind reell und bilden mit den Eigenvektoren eine orthogonale Basis

$$\Rightarrow \quad \hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad \text{Hauptachsensystem}$$

- <u>Was ändert sich an der Lichtausbreitung?</u>

Ampere: $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \times \vec{H} = -\omega \vec{D}$

Faraday: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \times \vec{E} = \mu_0 \vec{H}$

$\frac{\partial}{\partial t} \to -i\omega$

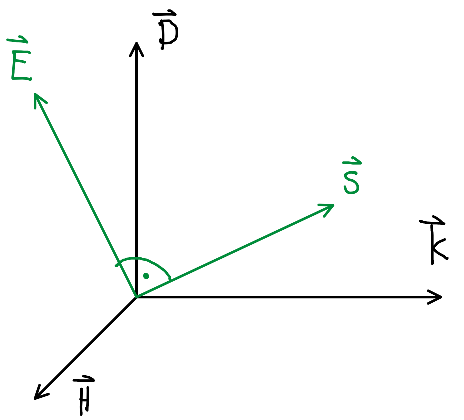
$\vec{\nabla} \times \to i k$

aus den Eigenschaften des Kreuzproduktes lesen wir ab: $\vec{D} \perp \vec{k}$ und $\vec{D} \perp \vec{H}$, $\vec{H} \perp \vec{k}$ und $\vec{E} \perp \vec{H}$

⇒ Transversalität für $\vec{D}$ und $\vec{H}$

⇒ da $\vec{D} \nparallel \vec{E}$ ist der Poynting-Vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ nicht mehr parallel zu $\vec{k}$!

$\Rightarrow$ Energie und Wellenfront laufen in verschiedene Richtungen „walk-off"



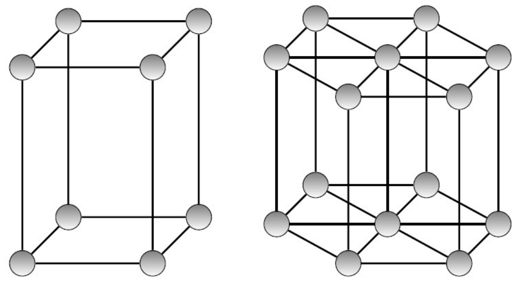
- weitere Effekte der Doppelbrechung:
  - ↳ Drehung der Polarisation ($\lambda/2$ Platte)
  - ↳ Änderung der Polarisationsart ($\lambda/4$ Platte)

  ↗ Kapitel 1.8

- wichtigste Klasse doppelbrechender Materialien: Einachsige Kristalle

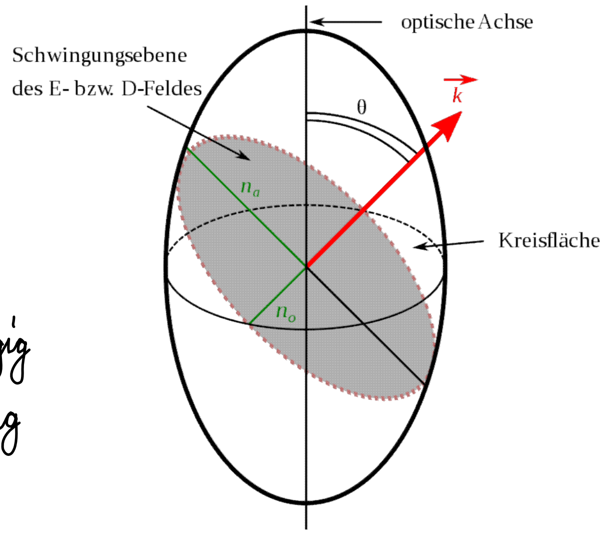
  $\Rightarrow$ hier gilt: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \underset{\text{ordentlich}}{n_o^2}$ $\quad \varepsilon_3 = \underset{\text{außerordentlich}}{n_e}$

  „extra ordinary"



- Darstellung der Brechzahl als Indexellipsoid

$$\frac{x^2}{n_o^2} + \frac{y^2}{n_o^2} + \frac{z^2}{n_e^2} = 1$$



Herleitung durch Lösung der Wellengleichung

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\varepsilon} \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\varepsilon} \vec{E} \quad \text{mit} \quad \vec{k} = \underbrace{n(\vec{e}_k)}_{\text{richtungsabhängig}} \frac{\omega}{c} \vec{e}_k$$

↳ Löse das auftretende Eigenwertproblem ↗ Vorlesung

↳ für einen beliebigen Wellenvektor $\vec{k}$ formt die Ebene senkrecht zu $\vec{k}$ eine Ellipse
Für eine bestimmte Polarisationsrichtung gibt der Abstand zum Ursprung die zugehörige Brechzahl an

Bemerkung: Der auftretende Term $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E}$
kann nicht wie üblich mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ vereinfacht werden, da im Material nur
$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$ gilt $\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\hat{\varepsilon} \vec{E}) = 0$ i.A. $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \neq 0$